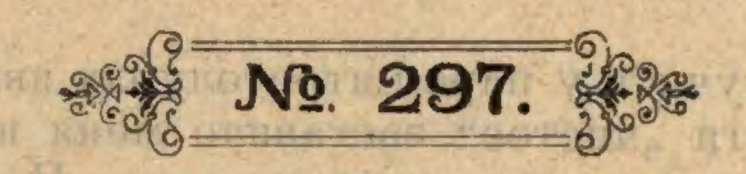
XXV Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

15 Мая  № 297. 1901 г.

Къ вопросу объ индивидуальности въ неорганизованномъ мірѣ.

Проф. П. Бахметьева въ Софіи.

I. Часть фактическая.

Всякій знаетъ, что нельзя встрѣтить въ природѣ двухъ индивидуумовъ не только одного и того же семейства, рода или вида, но даже и одной и той же разновидности изъ міра растительнаго или животнаго, которые были бы тождественны другъ съ другомъ. Всякій изъ нихъ имѣетъ свои особенности, которыя путемъ подбора могутъ быть переданы потомству и быть, по прошествіи нѣсколькихъ поколѣній, „усилены". Возникновеніе этихъ особенностей происходитъ по теоріи *Дарвина* вслѣдствіе вліянія окружающихъ условій.

Вопросъ объ индивидуальности въ неорганизованномъ мірѣ до сихъ поръ не былъ затрагиваемъ, можетъ быть, потому, что эти тѣла (аморфныя и кристаллическія, жидкости и газы) считаются за „неодушевленныя". Однако и у этой группы тѣлъ, какъ увидимъ, существуетъ индивидуальность, которая къ тому же есть, повидимому, слѣдствіе внѣшнихъ условій, а должна быть сведена къ причинамъ *внутреннимъ*, присущимъ самой матеріи.

Поводомъ изучить эти явленія были у меня бабочки и жуки, у которыхъ я изслѣдовалъ температуру ихъ тѣла при различной

температурѣ окружающаго воздуха. При этомъ, между прочимъ, оказалось, что соки насѣкомыхъ въ ихъ тѣлѣ имѣютъ способность *переохлаждаться*, при чемъ это переохлажденіе подчиняется рѣзко выраженнымъ законамъ [1]), провѣрить которые я старался затѣмъ на животныхъ „неорганизованныхъ".

Сначала я взялъ для этого воду, затѣмъ бензолъ и смѣсь бензола съ ксилоломъ [2]), а затѣмъ перешелъ къ пара-нитротолуолу [3]).

Желаніе получить у пара-нитротолуола явленіе переохлажденія по возможности „чистое" заставило меня изслѣдовать это вещество въ формѣ *плавающихъ* шариковъ. При этомъ я и натолкнулся на явленія, которыя поставили меня сначала въ тупикъ и о которыхъ и трактуется въ настоящей статьѣ [4]).

Жидкость, въ которой плавали расплавленные шарики, состояла изъ раствора хлористаго кальція въ водѣ (удѣл. вѣсъ 1,2). Пара-нитротолуолъ былъ полученъ отъ *Kahlbaum* изъ Берлина съ гарантіей его чистоты. Опытъ въ общемъ происходилъ слѣдующимъ образомъ:

Растворъ хлористаго кальція нагрѣвался приблизительно до 100^0 и вливался въ стеклянный цилиндрическій сосудъ ($2r=97$ м.м., $h=49$ м.м.), поставленный на двѣ деревянныхъ палочки, до половины его высоты. На поверхность раствора клался лоскутъ бумаги, и на нее затѣмъ наливалась горячая прокипяченная вода до верху. Послѣ этого площадь раздѣла двухъ жидкостей размѣшивалась стеклянной палочкой до полнаго ея уничтоженія, такъ что получался растворъ, плотность котораго переходила величины отъ 1 до 1,2 *постепенно* отъ поверхности къ дну.

Затѣмъ въ маленькій стеклянный тигель, укрѣпленный на никкелевой проволокѣ, насыпался кристаллическій пара-нитротолуолъ, который и помѣщался потомъ на поверхность горячей воды въ отдѣльномъ стаканѣ. Когда вещество совершенно было растоплено, оно погружалось съ помянутымъ тиглемъ въ приготовленный выше растворъ хлористаго кальція и изъ него приготовлялись шарики одинаковаго объема, которые и плавали за-

---

[1]) Относящіяся сюда мои статьи находятся въ слѣдующихъ журналахъ: Научное Обозрѣніе. Ноябрь 1898; O. Krancher's Entomolog. Jahrbuch. VIII. p. 121. 1898; Русскій Пчеловодн. Листокъ. XIV. № 3 и 4. 1899; Societas entomologica: XIV. № 1. 1899, XV. № 1. 1900, № 6 и 7. 1900; Zeitschr. für wissensch. Zoologie: LXVI. p. 521—604. 1899, LXVII. p. 529—550. 1900; Сборникъ Министерства Народн. Просвѣщ. Софія, XVI — XVII. стр. 82 — 159. 1900; Jllustr. Zeitschr. für Entomologie. V. № 6, 7 и 8. 1900; Архивъ Біологич. Наукъ 1900.

[2]) Печатается въ Журн. Физ.-Хим. Общ.

[3]) Записки Императорской Академіи Наукъ, X. № 7. 1900.

[4]) Считаю пріятнымъ долгомъ выразить здѣсь мою глубокую благодарность академику князю Б. Б. Голицыну за его участіе по поводу напечатанія моихъ сюда относящихся опытныхъ данныхъ въ Запискахъ Академіи Наукъ.

тѣмъ въ растворѣ приблизительно въ срединѣ его высоты; при этомъ было обращено вниманіе, чтобы шарики не находились близко къ стѣнкамъ сосуда.

Для приготовленія шариковъ служила особеннаго рода пипетка небольшой величины, оканчивающаяся тонкой трубочкой, на которой была сдѣлана черта. Другой конецъ пипетки былъ снабженъ каучуковой трубочкой, заткнутой стеклянной палочкой. Сначала въ пипетку съ помощію надавливанія каучуковой трубочки вгонялся горячій растворъ изъ сосуда; затѣмъ тонкій ея конецъ вставлялся въ расплавленное вещество и съ помощію упомянутаго натискиванія вгонялось туда и вещество до черты. Послѣ этого вещество выгонялось изъ трубочки и получался такимъ образомъ прозрачный, желтоватаго цвѣта шарикъ. Такихъ шариковъ приготовлялось сразу нѣсколько, послѣ чего тигель съ веществомъ удалялся и въ сосудъ погружался небольшой термометръ съ маленькимъ шарообразнымъ резервуаромъ; резервуаръ этотъ находился въ *центрѣ* сосуда и въ плоскости плаванія шариковъ (съ теченіемъ времени плоскость эта понижалась, но термометръ все таки не переставлялся).

Величина шарика была опредѣлена по вѣсу (сто сразу) и оказалась равной 3,846 м.м. въ діаметрѣ (шарики большаго діаметра приготовлялись сливаніемъ двухъ, трехъ и болѣе шариковъ въ одинъ въ самомъ растворѣ).

Сначала былъ произведенъ опытъ съ 10 одинаковыми шариками.

Такъ какъ нормальная точка затвердѣванія пара-нитротолуола лежитъ при 54°, то ожидалось, что плавающіе шарики не затвердѣютъ при этой температурѣ, а при болѣе низкой, т. е. покажутъ *переохлажденіе*. Это дѣйствительно и получилось. Когда температура раствора (а слѣдовательно и находящихся вблизи термометра шариковъ) достигла 53,7°, всѣ десять шариковъ были еще жидкими; черезъ 10 минутъ она была 48° и все таки затвердѣванія не было; наконецъ, когда термометръ показалъ 39,9°, *одинъ* шарикъ помутнѣлъ съ одного боку и сталъ медленно опускаться глубже; не доходя до дна, онъ вдругъ нѣсколько приподнялся вверхъ и затѣмъ сразу упалъ на дно, сдѣлавшись весь блѣдно-желтымъ и твердымъ. Второй шарикъ затвердѣлъ только при 37,1°, а послѣдній при 24,8°.

Такимъ образомъ первый шарикъ переохладился на 54 — —39,9=14,1°, а десятый (послѣдній) на 54—24,8=29,2°.

Являлся вопросъ, почему не всѣ шарики переохладились до одной и той же температуры, а показали такую большую разницу въ переохлажденіи?

1) Различіе, хотя бы и не большое, въ размѣрахъ шариковъ. Опыты, произведенные мною съ шариками различной величины и описанные въ выше цитированной статьѣ, показали од-

нако, что хотя *степень переохлажденія*[1]) *шариковъ и обратно пропорціонально ихъ радіусу,* все таки это вліяніе слишкомъ мало. Такъ, если взять шарикъ *вдвое* тяжелѣе другого, то если первый затвердѣвалъ напр. при 45,5°, второй затвердѣваетъ при 41,9°.

2) Различіе въ температурѣ плавающихъ шариковъ.

Изслѣдованіе показало несостоятельность и этого предположенія. Дѣйствительно, растворъ (а слѣдовательно и шарики) при окружности сосуда холоднѣе, чѣмъ въ его центрѣ, но эта разница у меня была на основаніи спеціальныхъ измѣреній не болѣе 2°; къ тому же, какъ было сказано выше, шарики были расположены по возможности ближе къ центру. Кромѣ того я часто наблюдалъ, что не всегда шарикъ, болѣе удаленный отъ центра сосуда, затвердѣвалъ ранѣе того, который былъ ближе къ центру. Разъ даже случилось, что два шарика были такъ близко другъ къ другу, что я подумалъ, что они сольются (какъ это иногда и случалось), но одинъ изъ нихъ затвердѣлъ при 38°, а другой только при 31°.

3) Диффузія жидкости, т. е. между различными слоями раствора.

Нѣсколько разъ я пробовалъ толкать шарики по различнымъ направленіямъ: вбокъ, вверхъ и внизъ и ясно наблюдалъ „жилки" раствора сзади шарика при его быстромъ движеніи; однако отъ этого шарики не затвердѣвали, и шарикъ, который я толкалъ, затвердѣвалъ затѣмъ иногда раньше, а иногда позже остававшихся спокойными.

4) Взаимодѣйствіе между шариками.

Для провѣрки этого предположенія я взялъ десять одинаковыхъ сосудовъ и расположилъ ихъ на одномъ и томъ же столѣ. Во всякій сосудъ съ одинаковымъ растворомъ было пущено по *одному* шарику, которые и плавали вблизи ихъ центровъ. При этомъ оказалось, что первый шарикъ затвердѣлъ при 40,5°, а послѣдній (10-й) при 31,2°, т. е. получилась все таки значительная разница въ 40,5—31,2=9,3° между переохлажденіемъ 1-го и послѣдняго шарика.

5) Порядокъ, въ которомъ приготовляются шарики.

Въ опытѣ 4) сосуды были нумерованы по порядку пусканія въ нихъ шариковъ. При этомъ оказалось, что шарики затвердѣвали въ слѣдующемъ порядкѣ: 3, 6. 4, 1, 2, 7, 9, 8, 5. 10, т. е. никакой зависимости между порядкомъ ихъ приготовленія и затвердѣванія не было.

Такимъ образомъ ни одна изъ пяти вѣроятныхъ причинъ не была подтверждена.

---

[1]) Степенью переохлажденія я называю величину $T-t$ гдѣ T означаетъ нормальную точку затвердѣванія даннаго вещества, а t, температуру, до которой охладилось это вещество.

Во время подобныхъ многочисленныхъ опытовъ, стараясь найти причину такого страннаго явленія, я дѣлалъ и другія наблюденія надъ шариками. Такъ, я обозначалъ на бумагѣ мѣста паденія затвердѣвшихъ шариковъ по порядку номера, надѣясь получить нѣкоторую фигуру, которая повторилась бы и въ другомъ подобномъ опытѣ; но ничего *повторяющагося* не получалъ. Я закрывалъ окна (опыты производились лѣтомъ) занавѣсками, отворялъ их и затворялъ, дѣлалъ опыты днемъ и ночью, клалъ вблизи сосуда магнитъ и всетаки получалъ всегда большую разницу для температуръ затвердѣванія перваго и десятаго шарика.

Одно обстоятельство помогло мнѣ открыть одну изъ причинъ этого страннаго явленія.

Производя опыты нѣсколько мѣсяцевъ съ однимъ и тѣмъ же числомъ шариковъ (10), я не имѣлъ всегда одну и ту же температуру въ комнатѣ и замѣтилъ, что когда въ комнатѣ было холоднѣе, то первый шарикъ затвердѣвалъ при одной температурѣ, а когда въ ней было теплѣе — то при другой. Такимъ образомъ являлась возможной причиной этому явленію *скорость охлажденія* (v) шариковъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ холодной комнатѣ сосудъ съ горячимъ растворомъ естественно будетъ охлаждаться быстрѣе, чѣмъ въ теплой, а слѣдовательно и v шарика будетъ мѣняться.

Такъ какъ v отъ времени не представляетъ линейной функціи, то я для ея опредѣленія наблюдалъ, *насколько градусовъ охлаждается растворъ въ теченіи одной минуты при температурѣ* 50^0 (число я взялъ произвольно) и это число градусовъ назвалъ скоростью охлажденія (v_{50} или для сокращенія v).

Опредѣленіе зависимости *степени переохлажденія перваго* шарика (изъ десяти), т. е. величины $54-t_1$, гдѣ 54 означаетъ *нормальную* точку затвердѣванія пара-нитротолуола, а t_1 точку затвердѣванія плавающаго шарика, отъ скорости охлажденія (v) дало слѣдующее правило изъ десяти отдѣльныхъ опытовъ:

v:	0,65	0,60	0,60	0,60	0,55	0,50	0,46	0,30	0,21	0,15
$54-t_1$:	11,6	11,5	12,3	**15,7**	14,1	(8,9)	10,5	10,0	8,8	8,5.

Т. е. *съ уменьшеніемъ скорости охлажденія степень переохлажденія перваго шарика* (изъ десяти) *сначала увеличивается, достигаетъ максимума* (15,7) *и затѣмъ уменьшается.*

Правило это приложимо не только для *перваго* шарика во всякомъ отдѣльномъ опытѣ, но и для какого угодно. Такъ напр. для *десятаго* шарика, который затвердѣвалъ въ различныхъ опытахъ при t_{10}, получилось:

v:	0,65	0,60	0,55	0,50	0,46
$54-t_{10}$:	24,8	28,5	**29,2**	19,5	19,1.

Здѣсь тоже наблюдается *максимальное* переохлажденіе при нѣкоторой *средней* скорости охлажденія.

Замѣчательно, что этотъ максимумъ для *перваго* и *десятаго* шарика получается при одной и той же величинѣ для v, а именно около 0,57, что означаетъ общность вліянія со стороны скорости охлажденія на затвердѣваніе какъ перваго, такъ и послѣдняго шарика.

Что это явленіе не случайное, показываютъ мои опыты съ переохлажденіемъ дестиллированной *воды* въ маленькихъ стаканчикахъ [1]), а именно:

v_0:	0,35	0,31	0,28	0,27	0,27	0,26	0,20	0,20
0^0-t:	—5,4	—4,8	**—7,9**	—6,0	—5,6	—6,0	—5,3	—4,3.

Опыты съ *бензоломъ* [1]) въ маленькихъ стаканчикахъ показали, что для него при извѣстной *средней* скорости охлажденія получается уже не максимумъ, а *минимумъ* степени переохлажденія. Во всякомъ случаѣ опять таки *экстремъ*.

Опыты съ бабочками и куколками показали, что соки, находящіеся въ бабочкахъ, даютъ при извѣстной средней скорости охлажденія ***максимумъ***, а для куколокъ ***минимумъ*** степени переохлажденія, т. е. въ этомъ отношеніи сокъ бабочки похожъ на воду и пара-нитротолуолъ, а сокъ куколки на бензолъ [2]).

Дальнѣйшее изученіе соковъ бабочекъ и куколокъ, а также нѣкоторыхъ растеній привели меня однако къ результату [3]), что беря скорости охлажденія въ болѣе широкихъ границахъ, чѣмъ здѣсь приведенныя, получается какъ у куколокъ, такъ и у бабочекъ *нѣсколько* минимумовъ и максимумовъ степени переохлажденія ихъ соковъ въ зависимости отъ скорости охлажденія.

Мы поэтому вправѣ предположить, что и для другихъ жидкостей получится не одинъ максимумъ или мининумъ, а ихъ будетъ нѣсколько для одной и той же жидкости и сказанная зависимость будетъ выражаться *волнообразной* линіей. Результатъ этотъ имѣетъ большую важность для дальнѣйшаго пониманія и представленія объ описываемомъ здѣсь явленіи индивидуальности шариковъ.

Можно было бы подумать, что скорость охлажденія шариковъ есть единственная причина, почему первый и десятый шарикъ въ одномъ и томъ же опытѣ не затвердѣваютъ при одинаковой температурѣ; анализъ полученныхъ результатовъ приводитъ насъ однако къ обратному заключенію, какъ это будетъ сейчасъ видно.

---

[1]) Журн. Физ.-Хим. Общ. 1900.

[2]) Zeitschr. für wissensch. Zoolog. LXVII. p. 529—550. 1900.

[3]) „Experimentelle biologische Studien au Jnsekten".

Томъ I: „Temperaturerhältnisse bei Jnsekten". Leipzig. **1900** (подъ печатью).

Приведемъ таблицу результатовъ изъ десяти опытовъ, нѣкоторые данныя которой были уже разсмотрѣны нами раньше.

v	t_1	$54-t_1$	t_{10}	$54-t_{10}$
0,65	42,4	11,6	29,2	24,8
0,60	42,5	11,5	—	—
0,60	41,7	12,3	—	—
0,60	38,3	**15,7**	25,5	28,5
0,55	39,9	14,1	24,8	**29,2**
0,50	45,1	(8,9)	34,5	19,5
0,46	43,5	10,5	34,9	19,1
0,30	44,0	10,0	—	—
0,21	45,2	8,8	—	—
0,15	45,5	8,5	—	—

Значеніе буквъ тоже, какъ и раньше.

Изъ этой таблицы видно, что самая большая разность между температурами затвердѣванія перваго и послѣдняго шарика въ одномъ и томъ же опытѣ наступаетъ при нѣкоторой средней скорости охлажденія (около 0,57), когда степень переохлажденія дѣлается максимальной (для перваго шарика около 15,7 и для десятаго шарика около 29,2). Эта наибольшая разность температуръ достигаетъ величины около $t_1-t_{10}=38,3-25,5=12,8^0$, или, если бы зависимость t отъ v была представлена графически, около *14,5*^{0} (какъ и въ самомъ первомъ опытѣ, приведенномъ въ настоящей статьѣ). При другихъ скоростяхъ охлажденія разница t_1-t_{10} вверхъ и внизъ отъ этого максимума постепенно уменьшается; такъ напримѣръ, при $v=0,46$ она равна только $43,5-34,9=8,6^0$.

Такимъ образомъ можно было бы, повторяю, подумать, что разница t_1-t_{10} сдѣлается нулемъ при очень большихъ и очень маленькихъ скоростяхъ охлажденія, чѣмъ средняя $v=0,57$, такъ какъ въ этихъ случаяхъ величина t_1 стремится къ предѣлу $=54^0$, т. е. къ нормальной точкѣ затвердѣванія вещества; къ этому же предѣлу стремится и величина t_{10}.

Однако сказанное выше о найденной *волнообразной* зависимости для соковъ бабочекъ и куколокъ (и бензолъ указываетъ на тоже самое) показываетъ, что прежде чѣмъ первый шарикъ достигнетъ предѣла 54^0, онъ повернетъ назадъ, т. е. его температура затвердѣванія съ дальнѣйшимъ увеличеніемъ или уменьшеніемъ скорости охлажденія будетъ не увеличиваться постоянно, а

будетъ уменьшаться. Такъ какъ это же замѣчаніе относится и къ десятаго шарика (при чемъ максимумы и минимумы для перваго и десятому шарику будутъ наступать при одной и той же величинѣ для v), то $t_1 - t_{10}$ не можетъ никогда сдѣлаться нулемъ. Индивидуальныя особенности нитротолуоловыхъ шариковъ въ этомъ отношеніи не могутъ быть слѣдовательно сглажены и скоростью ихъ охлажденія, хотя нельзя отрицать, что при извѣстныхъ величинахъ v особенности эти могутъ быть сведены къ минимуму.

Изъ всего до сихъ поръ сказаннаго видно, что явленіе, почему первый шарикъ (изъ десяти) затвердѣваетъ значительно раньше (по температурѣ и времени) десятаго, не можетъ быть объяснено ни одной изъ разобранныхъ здѣсь *внѣшнихъ* причинъ. Приходится поэтому допустить, что явленіе это совершенно случайное, или же оно происходитъ подъ вліяніемъ причинъ *внутреннихъ*, присущихъ молекуламъ самаго шарика.

Противъ *чистой* случайности этого „событія" говорятъ однако различные факты и прежде всего подчиненность его извѣстнымъ правиламъ, которые мы здѣсь и разсмотримъ.

Мы не будемъ говорить здѣсь о температурѣ затвердѣванія перваго шарика (t_1), которая, какъ мы видѣли, зависитъ главнымъ образомъ отъ скорости охлажденія (v) и выражается періодической функціей (волнообразной кривой); не будемъ говорить и о десятомъ шарикѣ (и о промежуточныхъ), который въ этомъ отношеніи подчиняется тому же правилу; а посмотримъ, какому правилу подчиняются величины t_1 и t_{10} по отношенію другъ къ другу. Для этого напишемъ на основаніи опытныхъ данныхъ вышеприведенной таблицы величины для t_1 по нисходящей степени, не обращая вниманія на величину v.

t_1	t_{10}	$t_1 - t_{10}$	$t_1 + t_{10}$	$\frac{t_2}{t_{10}}$	$\frac{t_1 + t_{10}}{t_1}$
45,5	—	—	—	—	—
45,2	—	—	—	—	—
45,1	34,5	10,6	79,6	1,31	1,77
44,0	—	—	—	—	—
43,5	34,9	8,6	78,4	1,27	1,80
42,5	34,9	7,6	77,4	1,22	1,82
42,4	29,2	13,2	71,6	1,42	1,69
41,7	—	—	—	—	—
39,9	24,8	15,1	64,8	1,61	1,62
38,3	25,5	12,8	63,6	1,50	1,66

Не входя въ сложныя вычисленія, мы можемъ на основаніи приведенной таблицы констатировать, что *сумма* $t_1 + t_{10}$ *съ уменьшеніемъ* t_1 *постепенно уменьшается*. Въ предѣлахъ наблюденныхъ величинъ для t_1 можемъ также сказать, что отношеніе $t_1 : t_{10}$ съ

уменьшеніемъ t_1 уменьшается, достигаетъ при нѣкоторой величинѣ для t_1 (42,5) *минимума* и затѣмъ снова увеличивается; что же касается величины $(t_1 + t_{10}) : t_1$, то она съ уменьшеніемъ t_1 увеличивается, достигаетъ при $t_1 = 42{,}5$ *максимума* и затѣмъ уменьшается.

Разность $t_1 - t_{10}$ не слѣдуетъ, повидимому, никакому простому правилу, а скорѣе представляетъ собою величину постоянную (въ среднемъ 11,3).

Эти правила не имѣютъ претензіи быть распространены для какихъ угодно величинъ для t_1, и, вѣроятно, окажутся внѣ приведенныхъ здѣсь предѣловъ для t_1 другими, но въ предѣлахъ для данной таблицы они имѣютъ мѣсто.

Такъ какъ въ этой таблицѣ величины для v не приняты во вниманіе (а онѣ измѣняются здѣсь отъ 0,65 до 0,15), то я произвелъ опытъ съ десятью шариками данной величины при $v = 1{,}5$, т. е. при такой скорости охлажденія, которая далеко выходитъ за предѣлы величинъ этой таблицы для v. При этомъ оказалось, что t_1 было 44,2, а $t_{10} = 32{,}5$.

Провѣряя правило послѣдней колонны, найдемъ, что $(t_1 + t_{10}) : t_1$ въ этомъ случаѣ равно 1,74, что близко подходитъ къ величинѣ 1,78, которая на основаніи сказаннаго правила должна соотвѣтствовать величинѣ $t_1 = 44{,}2$ [при $t_1 = 45{,}1$ величина $(t_1 + t_{10}) : t_1 = 1{,}77$, а при $t_1 = 43{,}5$ она равна 1,80].

Точно также и величина $t_1 + t_{10}$, которая въ данномъ случаѣ равна $44{,}2 + 32{,}5 = 76{,}7$, помѣщается между величинами колонны для $t_1 + t_{10}$, хотя ея мѣсто опредѣляется точнѣе по величинѣ t_{10}. Въ самомъ дѣлѣ, въ нашемъ опытѣ $t_1 = 44{,}2$, и слѣдовательно $t_1 + t_{10}$ должно бы было находиться между 79,6 и 78,4; на самомъ же дѣлѣ оно равно 76,7. Если же взять во вниманіе $t_{10} = 32{,}5$, наблюденное въ опытѣ, то величина $t_1 + t_{10}$ должна находиться на основаніи колонны второй и четвертой между 77,4 и 71,6, что на самомъ дѣлѣ и наблюдается $(t_1 + t_{10} = 76{,}7)$.

Отношеніе $t_1 : t_{10}$ тоже близко подходитъ подъ правило предпослѣдней колонны; а именно въ настоящемъ случаѣ оно $44{,}2 : 32{,}5 = 1{,}36$. Въ таблицѣ же при $t_1 = 45{,}1$ имѣемъ $t_1 : t_{10} = 1{,}31$.

Такимъ образомъ изъ этого контрольнаго опыта мы видимъ, что хотя онъ и не даетъ величинъ, которыя бы въ своихъ комбинаціяхъ *вполнѣ* совпадали съ выведенными выше правилами, но все таки онѣ слѣдуютъ имъ довольно удовлетворительно, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ, напр. для колонны четвертой и послѣдней, и вполнѣ точно.

Мы вправѣ поэтому отрицать *вполнѣ случайный* характеръ разбираемаго здѣсь явленія и должны обратиться поэтому къ возможности объясненія этого явленія при помощи причинъ *внутреннихъ*, что мы и сдѣлаемъ въ одной изъ послѣдующихъ статей.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Извлеченіе корня какой угодно степени.

Переводъ статьи изъ „Методологіи математики“ Дозá,

препод. Вл. Контера.

1. *Опредѣленіе.* Намъ извѣстно, что корнемъ степени m изъ какого-нибудь числа называется такое число, которое будучи возведено въ m-ую степень даетъ подкоренное число. Задача объ извлеченіи точнаго корня какой угодно степени рѣдко бываетъ возможна, т. к. число въ рѣдкихъ случаяхъ представляетъ точную степень. Кромѣ того, эта невозможность, въ извѣстномъ смыслѣ, увеличивается съ увеличеніемъ показателя корня. Справедливость этихъ двухъ предложеній доказывается путемъ разсужденій, аналогичныхъ тѣмъ, которыя насъ убѣждаютъ, что числа, представляющія точную квадратную и кубичную степень рѣдки, что количество ихъ въ данномъ интервалѣ уменьшается по мѣрѣ того, какъ мы разсматриваемъ все большія и большія числа и что это уменьшеніе идетъ значительно быстрѣе для кубовъ, чѣмъ для квадратовъ. Кромѣ того, цѣлое число, которое не представляетъ собой точной степени другого числа, вмѣстѣ съ тѣмъ не можетъ быть точной степенью дроби. Наконецъ, т. к. всѣ эти разсужденія приложимы и къ дробнымъ числамъ, то становится вполнѣ яснымъ, что количество чиселъ, представляющихъ точныя степени, сравнительно крайне ограничено. Отсюда слѣдуетъ, что, когда представляется необходимость извлечь корень степени m изъ какого нибудь числа, цѣлаго или дробнаго, то приходится прибѣгать къ извлеченію приближеннаго корня.

Вычисленіе корней, степень которыхъ выше 2-ой и 3-ей, дѣлается вообще при помощи логориѳмовъ. Но намъ интересно показать, что *правила, относящіяся къ извлеченію квадратныхъ и кубичныхъ корней, суть частные случаи другихъ правилъ, болѣе общихъ.*

2. *Корень какой нибудь степени m изъ цѣлаго числа съ точностью до 1.* Если цѣлое число, изъ котораго желаютъ извлечь корень степени m съ точностью до 1, менѣе 10^m, то этотъ корень будетъ менѣе 10, а потому онъ можетъ быть найденъ въ таблицѣ m-хъ степеней 9-ти первыхъ чиселъ.

Но если цѣлое число болѣе 10^m, то корень m-ой степени съ точностью до 1 болѣе 10 и содержитъ поэтому десятки и единицы. Правило для вычисленія этого корня всецѣло основывается на составѣ m-ой степенѣ двузначнаго числа. Разсмотрѣніе первыхъ двухъ членовъ разложенія квадрата и куба числа, содержащаго десятки и единицы, помогли намъ установить правила для извлеченія соотвѣтствующихъ корней. Мы будемъ слѣдовать тѣмъ же путемъ и здѣсь. Предварительно разсмотримъ слѣдующее предложеніе:

I. m-ая степень суммы двухъ чиселъ имѣетъ первымъ членомъ m-ую степень перваго числа и вторымъ членомъ повторенное m разъ произведеніе $(m-1)$-ой степени перваго члена на второе.

Отсюда вытекаетъ такое слѣдствіе:

II. m-ая степень числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, имѣетъ первымъ членомъ m-ую степень десятковъ и вторымъ членомъ m разъ повторенное произведеніе $(m-1)$-ой степени десятковъ на единицы.

Это послѣднее предложеніе дополняютъ слѣдующимъ:

III. Число десятковъ корня m-ой степени съ точностью до 1 изъ какого нибудь цѣлаго числа равно корню той же степени и той же точности изъ числа единицъ $(m+1)$-го разряда или порядка даннаго числа.

Принявъ во вниманіе эти два предложенія, возьмемъ сначала число большее 10^m, но меньшее 10^{2m} и предположимъ, что изъ него нужно извлечь корень m-ой степени съ точностью до 1. Этотъ корень будетъ больше 10, но меньше 10^2; слѣдовательно, онъ содержитъ десятки и единицы; цыфру десятковъ мы получимъ, если извлечемъ съ точностью до 1 корень степени m изъ единицъ $(m+1)$-го порядка даннаго числа. Такъ какъ единицы $(m+1)$-го порядка образуютъ число меньшее 10^m, то этотъ корень мы найдемъ въ таблицахъ, содержащихъ m-ыя степени первыхъ девяти чиселъ.

Чтобы получить цыфру единицъ, замѣтимъ, что, если изъ m-ой степени, N^m, числа N, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, отнять m-ую степень десятковъ, то останется m разъ повторенное произведеніе $(m-1)$-ой степени десятковъ на единицы и рядъ другихъ членовъ разложенія. Такъ какъ это m разъ повторенное произведеніе $(m-1)$-ой степени десятковъ на единицы представляетъ точное число единицъ m-го порядка, то отсюда заключаютъ, что оно исключительно можетъ содержаться въ той части остатка, которая состоитъ изъ единицъ m-го порядка; такимъ образомъ, для полученія простыхъ единицъ числа N, представляющихъ одинъ изъ множителей второго члена разложенія m-ой степени числа N, между тѣмъ какъ другой есть m разъ повторенная $(m-1)$-ая степень десятковъ, поступаютъ слѣдующимъ образомъ: въ остаткѣ отдѣляютъ $(m-1)$ цыфру справа, остальную часть, представляющую единицы m-го порядка, дѣлимъ на m разъ повторенную $(m-1)$-ую степень десятковъ. Частное не можетъ быть слишкомъ малымъ; наоборотъ, оно можетъ быть слишкомъ большимъ, такъ какъ въ ту часть остатка, о которой была рѣчь, могутъ войти единицы m-го порядка, образовавшіяся въ другихъ членахъ разложенія m-ой степени числа N. Для испытанія этого частнаго пишутъ его справа найденной цыфры десятковъ и возвышаютъ полученное число въ m-ую степень. Если результатъ можно вычесть изъ предложен-

наго числа, цыфра единицъ будетъ подлежащая; въ противномъ случаѣ слѣдуетъ уменьшить ее на 1, 2, 3 и т. д., до тѣхъ поръ, пока вычитаніе не будетъ возможнымъ.

Возьмемъ теперь какое-нибудь цѣлое число большее, 10^m. Его m-ый корень съ точностью до 1 будетъ больше 10 и слѣдовательно будетъ содержать десятки и единицы. Цыфру десятковъ можно найти, извлекая корень m-ой степени съ точностью до 1 изъ единицъ $(m+1)$-го порядка предложеннаго числа. Если это число единицъ $(m+1)$-го порядка болѣе 10^m, но менѣе 10^{2m}, то получаютъ предыдущій случай. Полученный корень содержитъ 2 цыфры, которыя представляютъ десятки корня m-ой степени изъ даннаго числа. Для отысканія единицъ поступаютъ по прежнему.

Если корень изъ числа имѣетъ 4, 5, 6, ... цыфръ, то путемъ такихъ же разсужденій случай съ 4-мя цыфрами приводятъ къ случаю съ 3-мя, случай съ 5-ью—къ случаю съ 4-мя цыфрами и т. д. Отсюда выводятъ слѣдующее правило:

Чтобы извлечь съ точностью до 1 корень m-ой степени изъ какого-нибудь цѣлаго числа, дѣлятъ это число отъ правой руки къ лѣвой на грани, по m цыфръ въ каждой; извлекаютъ затѣмъ съ точностью до 1 корень указанной степени изъ 1-ой грани слѣва, число цыфръ которой можетъ измѣняться отъ 1 до m; результатъ даетъ первую цыфру корня. Изъ этой первой грани вычитаютъ m-ую степень найденной цыфры; справа остатка пишутъ первую цыфру второй грани; полученное число дѣлятъ на m разъ повтореннюу $(m-1)$-ую степень первой цыфры и получаютъ 2-ую цыфру корня, или вполнѣ точную, или слишкомъ большую; эту цыфру испытываютъ, написавъ ее справа первой цыфры корня и возвысивъ полученное такимъ образомъ число въ m-ую степень. Результатъ долженъ быть меньше числа, представленнаго совокупностью первыхъ двухъ граней слѣва. Найдя 2-ую цыфру корня послѣ одной или нѣсколькихъ попытокъ и возвысивъ найденную часть корня въ степень m, вычитаютъ результатъ изъ двухъ первыхъ граней; справа къ остатку приписываютъ первую цыфру 3-ьей грани. Полученное число дѣлятъ на m разъ повторенную $(m-1)$-ую степень уже найденной части корня и опредѣляютъ такимъ образомъ 3-ью цыфру корня, которая будетъ точной или слишкомъ большой; испытываютъ эту цыфру, написавъ ее справа первыхъ двухъ цыфръ корня и возвысивъ все это число въ m-ую степень; результатъ долженъ быть меньше числа, образованнаго совокупностью первыхъ 3-хъ граней даннаго. Продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока не будутъ истощены всѣ грани.

Приложеніе этого правила даетъ точный m-ый корень, если данное число есть точная m-ая степень.

Замѣчаніе I. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что число цыфръ корня m-ой степени съ точною до 1 равно числу граней, на которое мы разобьемъ подкоренное число, отдѣляя отъ правой руки къ лѣвой по m цыфръ.

II. m-ая степень цѣлаго числа можетъ оканчиваться нулями, если само число оканчивается однимъ или нѣсколькими нулями; но m-ая степень числа, состоящаго только изъ десятковъ или сотенъ, или тысячъ, и т. д. всегда оканчивается числомъ нулей, кратнымъ m. Отсюда слѣдуетъ, что если число нулей, которыми оканчивается число, не дѣлится на m, то изъ такого числа нельзя извлечь точно корня m-ой степени.

3. *Корень m-ой степени съ точностью до 1 изъ дроби.*

При помощи разсужденій, аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользуемся въ теоріи квадратныхъ и кубичныхъ корней изъ дробныхъ чиселъ, мы доказываемъ, что m-ый корень изъ дроби съ точностью до 1 равенъ корню той же степени изъ цѣлой ея части; такимъ образомъ данный вопросъ сводится къ предыдущему.

Подъ корнемъ m-ой степени съ точностью $\frac{p}{q}$ изъ цѣлаго или дробнаго числа мы разумѣемъ наибольшее кратное $\frac{p}{q}$, m-ая степень котораго менѣе всего отличается отъ даннаго числа.

Разсуждая такъ, какъ въ частныхъ случаяхъ, относящихся къ извлеченію квадратныхъ и кубичныхъ корней, мы выводимъ слѣдующее правило:

Чтобы извлечь съ точностью $\frac{p}{q}$ корень m-ой степени, $k.\frac{p}{q}$, изъ какого нибудь числа, цѣлаго или дробнаго, слѣдуетъ это число умножить на m-ую степень числа обратнаго дроби приближенія, извлечь изъ результата корень m-ой степени, k, съ точностью до 1 и умножить этотъ корень на дробь приближенія.

Замѣчаніе I. Если приближенный корень m-й степени желаютъ выразить дробью вида $\frac{k}{10^n}$, то k есть корень m-ой степени съ точностью до 1 изъ цѣлой части произведенія даннаго числа на $(10^n)^m$.

Замѣчаніе II. При извлеченіи корня m-ой степени съ точностью до $\frac{1}{10^n}$ изъ цѣлаго числа, которое не есть точная m-ая степень, мы, при условіи, что значеніе n не дано, получаемъ безконечный рядъ десятичныхъ знаковъ, слѣдующихъ другъ за другомъ согласно закону, независящему отъ характера пріема извлеченія; но, конечно, полученный рядъ цыфръ періода не имѣютъ.

4. *Извлеченіе корня степени m приводится къ послѣдовательному извлеченію корней, степени которыхъ соотвѣтственно равны первоначальнымъ множителямъ показателя m.*

I. Намъ извѣстно, что для извлеченія корня, напр., 18-ой степени изъ числа N, которое есть точная степень 18-ти, мы имѣемъ право извлекать послѣдовательно корни степеней, соотвѣтственно равныхъ первоначальнымъ множителямъ показателя.

Пусть теперь N' есть число, изъ котораго корень m-ой степени точно не извлекается; этотъ корень съ точностью до 1 мы получимъ, извлекая послѣдовательно съ точностью до 1 корни степеней, соотвѣтственно равныхъ множителямъ числа m.

Допустимъ, что $m = a \times b \times c$, и обозначимъ черезъ g корень степени a съ точностью до 1 изъ числа N', черезъ h — такой же корень степени b изъ g и черезъ k—корень степени c изъ h; докажемъ, что k есть корень m-ой степени съ точностью до 1 изъ числа N'.

На основаніи предыдущихъ условій имѣемъ рядъ слѣдующихъ неравенствъ:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} g^a \leqslant N' < (g+1)^a, \\ h^b \leqslant g < (h+1)^b, \\ k^c \leqslant h < (k+1)^c \end{cases}$$

Разсмотримъ сначала первое соотношеніе каждой изъ 3-хъ группъ неравенствъ и возведемъ оба члена 2-го неравенства въ степень a и третьяго въ степень ab; будемъ имѣть:

$$g^a \leqslant N',$$

$$h^{ab} \leqslant g^a,$$

$$k^{abc} \leqslant h^{ab}.$$

Складывая почленно эти неравенства и упрощая результаты, находимъ

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad k^{abc} \leqslant N'.$$

Если мы разсмотримъ вторыя соотношенія каждой изъ 3-ехъ группъ неравенствъ (1), то, замѣтивъ, что два члена каждой изъ нихъ отличаются другъ отъ друга не менѣе, чѣмъ на 1, можемъ написать такія неравенства:

$$N' < (g+1)^a,$$

$$g+1 \leqslant (h+1)^b,$$

$$h+1 \leqslant (k+1)^c.$$

По возведеніи обѣихъ частей второго неравенства въ степень a и обѣихъ частей 3-го въ степень ab, находимъ:

$$N' < (g+1)^a,$$

$$(g+1)^a \leqslant (h+1)^{ab},$$

$$(h+1)^{ab} \leqslant (k+1)^{abc}.$$

Складывая почленно эти неравенства и упрощая результатъ,

находимъ

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad N' < (k+1)^{abc}.$$

Сопоставляя (2) и (3) соотношенія, имѣемъ окончательно, что

$$k^{abc} \leqslant N' < (k+1)^{abc}$$

или

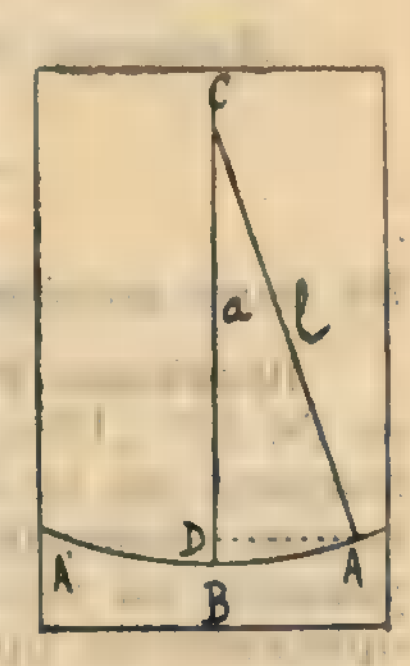
$$k^m \leqslant N' < (k+1)^m.$$

Эти послѣднія неравенства показываютъ, что k есть дѣйствительно корень m-ой степени изъ N' съ точностью до 1.

ЗАДАЧА О МАЯТНИКѢ.

Профессора Н. Пильчикова въ Одессѣ.

Пусть $AB = l\alpha$ безконечно малая амплитуда маятника. Разыщемъ время t, употребляемое маятникомъ на ея прохожденіе.



§ 1. На безконечно маломъ пути AB ускореніе силы, движущей маятникъ, измѣняется сплошнымъ образомъ отъ $g \cdot \operatorname{Sin}\alpha$ (или, по малости α, отъ $g\alpha$) до нуля. Сила, движущая маятникъ, перемѣнна, но такъ какъ разсматривается лишь безконечное малое перемѣщеніе маятника, то перемѣнную силу замѣнимъ постоянною, сообщающею ускореніе среднее изъ значеній ускоренія перемѣнной силы въ началѣ и въ концѣ безконечно малаго пути AB, т. е. $^1/_2 g\alpha$. Такимъ образомъ получится движеніе подъ дѣйствіемъ постоянной силы, при чемъ, какъ извѣстно,

$$\text{время} = \sqrt{\frac{2 \cdot \text{пространство}}{\text{ускореніе}}},$$

слѣдовательно:

$$t = \sqrt{2AB \frac{2}{g\alpha}},$$

но $AB = l\alpha$, поэтому

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

То же время употребитъ маятникъ на прохожденіе дуги $A'B = AB$, слѣдовательно время T полнаго колебанія маятника будетъ

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

§ 2. На безконечно маломъ пути AB скорость маятника измѣняется отъ 0 до $\sqrt{2g \cdot BD}$. Такъ какъ AB безконечно мало, то движеніе по немъ будемъ разсматривать какъ равномѣрное со скоростью среднею изъ скоростей въ началѣ и концѣ пути AB. При равномѣрномъ движеніи

$$\text{время} = \frac{\text{пространству}}{\text{скорость}},$$

слѣдовательно

$$t = \frac{AB}{\sqrt{2g \cdot BD}}.$$

Но по извѣстной теоремѣ

$$BD = \frac{AB^2}{2l},$$

слѣдовательно

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

и

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Извѣстно, однако, что въ дѣйствительности

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Въ чемъ погрѣшность аргументаціи?

Примѣчаніе Редакціи. Настоящая замѣтка была уже напечатана въ № 125 „Вѣстника“, — но ни одного отвѣта на поставленные вопросы мы не получили. Между тѣмъ такой отвѣтъ былъ бы весьма желателенъ, такъ какъ онъ долженъ былъ бы содержать указанія на то, какія изъ многочисленныхъ допущеній, которыя принимаются при элементарныхъ доказательствахъ физическихъ истинъ, законны и не ведутъ къ неправильнымъ выводамъ. Въ виду этого мы съ любезнаго разрѣшенія автора печатаемъ эту замѣтку снова.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Точка кипѣнія жидкаго водорода. Для опредѣленія этой температуры *Dewar* (Дьюаръ),—первый, получившій жидкій водородъ въ большомъ количествѣ, а также превратившій его въ твердое состояніе,—пользовался первоначально „платиновымъ термометромъ“, т. е. опредѣлялъ температуру жидкаго водорода по сопротивленію платиновой проволоки, въ немъ находящейся. Такъ какъ при этомъ приходится предполагать, что законъ измѣненія сопротивленія, имѣющій мѣсто при болѣе высокихъ температурахъ,

остается тѣмъ же самымъ и при столь низкихъ температурахъ, то Dewar считалъ полученное имъ значенiе температуры кипѣнiя водорода, а именно — 238·°4 С. или 34·°6 по абсолютной шкалѣ (т. е. считая отъ—273°), не вполнѣ достовѣрнымъ и подлежащимъ повѣркѣ.

Для повѣрки Dewar воспользовался газовымъ термометромъ, причемъ опять таки пришлось предположить, что законъ измѣненiя упругости газовъ съ измѣненiемъ температуры остается тѣмъ же самымъ при столь низкихъ температурахъ, какъ и при болѣе высокихъ. Для того, чтобы обосновать такое предположенiе, Dewar произвелъ опредѣленiе, пользуясь различными газами, а именно гелiемъ, (температура кипѣнiя котораго при атмосферномъ давленiи ниже температуры кипѣнiя водорода), самимъ водородомъ, кислородомъ и углекислымъ газомъ. Такъ такъ температуры кипѣнiя двухъ послѣднихъ газовъ выше, чѣмъ водорода, то Dewar наполнялъ ими термометръ при довольно большомъ разрѣженiи, такъ чтобы даже при столь низкихъ температурахъ они не могли дойти до состоянiя насыщенiя и оставались газообразными.

Всѣ эти четыре столь различныхъ по температурѣ кипѣнiя при атмосферномъ давленiи газа давали довольно согласные между собою результаты, изъ которыхъ Dewar вывелъ, что температура кипѣнiя водорода равна — 252·°5 Ц. или 20·°5 абсолютной шкалы. Для кислорода температура кипѣнiя оказалась равною — 182·°5 Ц., что весьма близко къ опредѣленiямъ Вроблевскаго, Ольшевскаго и другихъ.

Вбг.

73-й Съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей состоится въ Гамбургѣ отъ 22—28 сентября новаго стиля. На съѣздѣ будутъ дѣйствовать слѣдующiя секцiи: 1) Математика, астрономiя и геодезiя. 2) Физика. 3) Прикладная математика и физика. 4) Химiя. 5) Прикладная химiя. 6) Геофизика и метеорологiя. 7) Географiя, гидрографiя и картографiя. 8) Минералогiя и геологiя. 9) Ботаника. 10) Зоологiя съ энтомологiей. 11) Антропологiя, Энтомологiя.

МАТЕМАТИЧЕСКIЯ МЕЛОЧИ.

Выводъ формулы сложенiя тригонометрическихъ величинъ.

Въ ноябрской тетради „Periodico di Mathematica" за истекшiй годъ G. Cardoso-Laynes предлагаетъ слѣдующiй чрезвычайно простой выводъ формулы сложенiя. Пусть въ треугольникѣ ABC основанiя высотъ будутъ *a*, *b*, *c*. Тогда

$$\overline{BC}\cdot\overline{Aa}=\overline{AC}\cdot\overline{Bb} \text{ или } (\overline{Ba}+\overline{Ca})\,\overline{Aa}=\overline{AC}\cdot\overline{Bb}.$$

Раздѣляя обѣ части на $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ получимъ:

$$\frac{\overline{Ba}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{Aa}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{Ca}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{Aa}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{Bb}}{\overline{AB}}.$$

Но согласно опредѣленію sinus'а и cosinus'а имѣемъ:

$$\frac{\overline{Ba}}{\overline{AB}} = \cos B, \frac{\overline{Aa}}{\overline{AC}} = \sin C, \frac{\overline{Ca}}{\overline{AC}} = \cos C, \frac{\overline{Aa}}{\overline{AB}} = \sin B, \frac{\overline{Bb}}{\overline{AB}} = \sin A$$

подставляя эти величины въ предыдущее равенство, мы непосредственно находимъ

$$\cos B \sin C + \cos C \sin B = \sin A.$$

А такъ какъ $A = 180 - (B + C)$, то

$$\sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C.$$

Предыдущій выводъ естественно предполагаетъ, что каждый изъ угловъ B и C меньше 90^0, но дальнѣйшее обобщеніе этой формулы представляетъ уже обычный чисто аналитическій процессъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

E. Cesàro. „Elementi di calcolo infinitesimale con numerosi applicazioni geometriche".

Nap. gr. 8⁰. 1899. s. 395.

Вышедшій въ концѣ 1899 года курсъ анализа безконечномалыхъ извѣстнаго профессора неаполитанскаго университета, автора Corso di analise algebrica, Lezioni di Geometria intrinseca, интересныхъ изслѣдованій по теоріи чиселъ, заслуживаетъ вниманія по тому искусству, съ какимъ авторъ даетъ вполнѣ современное изложеніе основаній дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія въ небольшомъ конечно объемѣ, но вполнѣ исчерпывая то, что обыкновенно входитъ въ курсъ техническихъ и даже университетскихъ курсовъ. Порядокъ изложенія уклоняется отъ обычнаго: изложивъ ученіе о предѣлахъ и выведя основныя свойства производной, Cesàro, какъ пополненіе понятій о предѣлахъ, излагаетъ вопросъ о нахожденіи истиннаго значенія неопредѣленныхъ выраженій. За симъ идетъ отдѣлъ о разложеніи въ ряды, доказывается формула Taylor'а и др., дается разложеніе раціональныхъ функцій на частныя дроби и вопросы о maximum—

minimum. Уже послѣ этого идетъ собственно дифференціальное исчисленіе—дифференцированіе функцій, геометрическія приложенія, отличающіяся своимъ богатствомъ и оригинальностью, что дѣлаетъ курсъ особенно пригоднымъ для техническихъ заведеній.

Въ интегральномъ исчисленіи обращаетъ на себя вниманіе введеніе въ элементарный курсъ способа Lagrange'а интегрированіе уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Д. С. (Екатеринославъ).

„Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе и сборникъ геометрическихъ задачъ съ полными и краткими рѣшеніями". Курсъ среднихъ учебныхъ учебныхъ заведеній. (Для старшихъ классовъ). Составилъ преподаватель Тамбовской гимназіи **И. Александровъ**. Изданіе VII. Москва. 1900.

Книга г. Александрова слишкомъ извѣстна русской школѣ, чтобы мы считали нужнымъ вновь давать о ней отзывъ: рецензіи о ней были уже помѣщены и въ „Вѣстникѣ" и во многихъ другихъ періодическихъ изданіяхъ, интересующихся нашей учебной литературой. Настоящее седьмое изданіе перепечатано безъ измѣненія съ шестого изданія, одобреннаго Уч. Ком. Мин. Нар. Просвѣщ. какъ учебное пособіе для среднихъ учебныхъ заведеній. Пятое изданіе удостоено высшей награды — преміи Императора Петра Великаго. Возвращаясь вновь къ этому сочиненію, мы имѣемъ въ виду обратить вниманіе нашихъ читателей на тотъ успѣхъ, какой имѣлъ учебникъ г. Александрова заграницей. Въ 1899 году г. Д. Аитовъ перевелъ эту книгу на французскій языкъ и *A. Hermann* въ Парижѣ издалъ ее подъ заглавіемъ „Problemes de géométrie élémentaire groupés d'aprés les méthodes à employer pour leur résolution" par *Jvan Alexandroff*. Не много есть русскихъ учебниковъ, которые удостоились такого вниманія. Рецензіи о книги г. Александрова были помѣщены почти во всѣхъ иностранныхъ математическихъ журналахъ: Въ „Journal de Mathematiques élementaires", „L'Enseiquement mathématique", „Nouvelles annales de mathematiques", „Zeitschrift für den mathematisychen und naturwissenschaftlichen Unterricht" и т. д. Всѣ эти рецензіи даютъ очень лестные для автора отзывы о его книгѣ и сходятся на томъ, что она можетъ быть поставлена рядомъ съ классическимъ сочиненіемъ *S. Petersen'а* „Методы и теоріи рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе". Въ видѣ образца мы приведемъ здѣсь одну изъ этихъ рецензій, помѣщенную въ „L'Enseiquement Mathématiques" за 1899 г. ст. 297. Читателей, не видавшихъ книги г. Александрова, она ознакомитъ съ ея содержаніемъ.

„Эта небольшая книга, выдержавшая въ Россіи въ короткое время шесть изданій, по характеру разработки предмета, по ясно-

сти изложенія, по обилію и выбору задачъ, рѣшенныхъ и предложенныхъ, окажетъ большую услугу дѣлу преподаванія элементарной геометріи.

Геометрическія задачи можно классифицировать двумя способами. Первый способъ заключается въ томъ, что матеріалъ располагается въ порядкѣ курса или трактата. (Прямая линія, окружность, подобныя фигуры, площади и т. д. Эта система, удовлетворяющая программамъ классической школы, была до послѣднихъ лѣтъ господствующей. Но она имѣетъ то неудобство, что она требуетъ для каждой задачи спеціальнаго, изолированнаго рѣшенія, которое представляетъ собой какъ бы случайную побѣду надъ той или иной трудностью; она недостаточно подчеркиваетъ метода, причинъ, въ силу которыхъ онъ примѣняется въ данномъ случаѣ и во многихъ другихъ случаяхъ.

Второй способъ заключается въ томъ, что задачи располагаются по методамъ, которые должны быть примѣнены для ихъ разрѣшенія. Здѣсь устанавливается теорія каждаго метода, а затѣмъ указывается примѣненіе принциповъ, на которыхъ онъ основанъ, къ рѣшенію задачъ различной природы, независимо отъ того, какія фигуры входятъ въ заданіе. Этотъ порядокъ идеи, блестяще проведенный недавно въ книгѣ г. *Petersen'a* („Методы и рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе") представляется единственнымъ, который способенъ научить учащихся, обладающихъ основными свѣдѣніями, умѣнію методически рѣшать конструктивныя задачи; это единственный путь, который можетъ быть плодотворенъ по своимъ результатамъ.

Этими именно приципами руководствуется г. Александровъ, успѣшно развивая его въ своемъ сочиненіи. Каждая глава, даже каждое подраздѣленіе главы, начинается изложеніемъ метода, который долженъ быть здѣсь примѣняемъ. Для кажддго метода авторъ диетъ рядъ типичныхъ задачъ, хорошо и подробно рѣшенныхъ и разобранныхъ, за которыми слѣдуетъ много примѣровъ для самостоятельныхъ упражнепій учащихся".

Сочиненіе раздѣлено на четыре главы и содержитъ не менѣе 400 задачъ, изъ которыхъ около 150 снабжены подробными рѣшеніями. Книга посвящена главнымъ образомъ плоской геометріи, хотя въ III главѣ имѣется небольшое число задачъ, относящихся къ стереометріи". (L. Ripert. Paris).

ЗАДАЧИ.

XXII. На плоскости даны прямая L и двѣ точки P и Q. Найти на прямой L точку x такъ, чтобы сумма угла PxQ и удвоеннаго угла, образуемаго прямыми Qx и L, имѣла данное значеніе.

Складываемые углы отсчитываются въ одномъ направленіи.

М. Зиминъ (Варшава).

XXIII. Сумма всѣхъ дѣлителей нѣкотораго цѣлаго числа N втрое больше этого числа, а частное отъ дѣленія N на 512 есть цѣлое число, не дѣлящееся ни на какой квадратъ, большій единицы. Найти N.

Е. Григорьевъ (Казань).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 46 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$\left(\frac{x}{y}\right)^x = (xy)^y.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 47 (4 сер.). Доказать, что изъ равенства

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

гдѣ x и y—дѣйствительныя числа, не равныя одновременно нулю, и гдѣ $a > 0$, вытекаетъ неравенство

$$x + y + a > 0.$$

М. Зиминъ (Варшава).

№ 48 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по сторонѣ AB, углу A и отношенію m стороны BC къ медіанѣ, проведенной къ этой сторонѣ.

(Заимств.).

№ 49 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по высотѣ его AD и по условію, что эта высота и стороны AB, AC и BC образуютъ геометрическую прогрессію.

(Заимств.).

№ 50 (4 сер.). Пусть A, B, C — три цѣлыхъ числа, записанныхъ соотвѣтственно по десятичной системѣ:

A — при помощи $2m$ цыфръ, равныхъ 1;

B — при помощи $m + 1$ цыфръ, равныхъ 1;

C — при помощи m цыфръ, равныхъ 6.

Доказать, что $A + B + C + 8$ — точный квадратъ.

(Заимств.).

№ 51 (4 сер.). На чашки вѣсовъ съ равноплечимъ рычагомъ наложены грузы: съ одной стороны тѣло вѣсомъ въ 502 грамма и въ объемѣ 1 литръ, съ другой — шаръ плотности 20 и въ объемѣ равный 0,000025 куб. метровъ. Весь приборъ заключенъ въ закрытое помѣщеніе, содержащее только углекислый газъ. Каково должно быть давленіе это газа, чтобы при температурѣ 100° вѣсы находились въ равновѣсіи? Плотность углекислаго газа равна 1,5.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

I. ***На основаніи ВС равнобедреннаго треугольника АВС найти точку Х такъ, чтобы произведеніе***

$$AX^2 . BX . CX$$

было maximum.

Пусть D—средина основанія BC. Обозначимъ черезъ $2a$ основаніе BC, черезъ h—высоту AD треугольника ABC, черезъ x—отрѣзокъ DX. Тогда

$$AX^2 . BX . CX = (h^2+x^2)(a-x)(a+x) = (h^2+x^2)(a^2-x^2).$$

Такъ какъ сумма перемѣнныхъ величинъ h^2+x^2 и a^2-x^2 есть величина постоянная, то произведеніе ихъ достигаетъ maximum'а вообще при условіи ихъ равенства, т. е. при условіи

$$h^2+x^2 = a^2-x^2,$$

откуда

$$x^2 = \frac{a^2-h^2}{2}, \quad x = \sqrt{\frac{a^2-h^2}{2}}.$$

Но такое рѣшеніе имѣетъ имѣсто лишь при условіи $a \geqslant h$.

Если же $a < h$, то, представляя выраженіе $(h^2+x^2)(a^2-x^2)$ въ видѣ

$$a^2h^2 - [(h^2-a^2)x^2 + x^4]$$

и замѣчая, что въ этомъ случаѣ выраженіе, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ, не можетъ стать отрицательнымъ, заключаемъ, что данное выраженіе достигаетъ maximum'а при $x = 0$, т. е. въ этомъ случаѣ искомая точка есть средина основанія BC.

Е. Григорьевъ (Казань); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

II. ***На линіи, соединяющей центры двухъ сферъ, лежащихъ внѣ другъ друга, найти такую точку, чтобы сумма поверхностей сегментовъ видимыхъ изъ этой точки, была наибольшая.***

Назовемъ черезъ M искомую точку, черезъ O и O' центры данныхъ сферъ; обозначимъ соотвѣтственно черезъ R и r радіусы сферъ O и O', черезъ ξ и η—стрѣлки сегментовъ, лежащихъ соотвѣтственно на этихъ сферахъ, черезъ x и y—разстоянія MO и MO'. Назовемъ черезъ MT какую-нибудь касательную изъ точки M къ сферѣ O, черезъ TB—перпендикуляръ изъ точки T на прямую OO', черезъ a—прямую OO'. Тогда

$$OM . OB = \overline{OT}^2,$$

или

$$x(R-\xi) = R^2,$$

откуда

$$\xi = R - \frac{R^2}{x}.$$

Точно также найдемъ:

$$\eta = r^2 - \frac{r^2}{y}.$$

Выраженіе

$$2\pi(R\xi + r\eta) = 2\pi\left[R^2 + r^2 - \left(\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{y}\right)\right]$$

по условію должно достичь maximum'a при дополнительныхъ условіяхъ

$$x \geqslant R > 0,\ y \geqslant r > 0;\ x + y = a \qquad (1),$$

или, что все равно, выраженіе

$$\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{y} \qquad (2)$$

при тѣхъ же дополнительныхъ условіяхъ должно достичь minimum'a.

На основаніи равенства (1)

$$\frac{x+y}{a} = 1,$$

а потому

$$\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{y} = \frac{x+y}{a}\left(\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{y}\right) = \frac{R^3}{a} + \frac{r^3}{a} + \frac{1}{a}\left(R^3\frac{y}{x} + r^3\frac{x}{y}\right).$$

Такимъ образомъ minimum выраженія $\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{y}$ будетъ имѣть мѣсто тогда, когда достигнетъ minimum'a выраженіе

$$R^3\frac{y}{x} + r^3\frac{x}{y}.$$

Произведеніе перемѣнныхъ величинъ $R^3\frac{y}{x}$ и $r^3\frac{x}{y}$ есть величина постоянная, а потому minimum суммы этихъ величинъ будетъ достигнутъ при условіи:

$$R^3\frac{y}{x} = r^3\frac{x}{y},$$

или

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{R^3}{r^3},$$

откуда

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{r^3}}. \qquad (3)$$

Въ послѣдней формулѣ имѣются въ виду ариѳметическія значенія корней.

Изъ равенствъ (1) и (3) находимъ:

$$x = \frac{a\sqrt{R^3}}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}},\quad y = \frac{a\sqrt{r^3}}{\sqrt{R^3}+\sqrt{r^3}}. \qquad (4).$$

Если $R > r$, то условіе $x \geqslant R$ соблюдено, что можно вывести изъ предполагаемаго въ условіи задачи неравенства $a \geqslant R + r$.

Если при этомъ соблюдено и другое условіе $y \geqslant r$, то формулы (4) даютъ годное рѣшеніе; но это послѣднее условіе можетъ и не выполняться; тогда искомая точка есть точка встрѣчи линіи центровъ съ поверхностью меньшей сферы, что предоставляемъ доказать читателю *).

Если $R = r$, то формулы (4) даютъ также годное рѣшеніе.

Е. Григорьевъ (Казань); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 647 (3 сер.). *Столбъ воды высотою въ 1,55м. и столбъ другой жидкости высотой въ 3,17м. уравновѣшиваются въ вѣтвяхъ трубки U; температура обѣихъ жидкостей 4°. Какова плотность второй жидкости? Какова была бы высота этой*

---

*) Для доказательства достаточно показать, что разность $R^3\frac{y}{x} - r^3\frac{x}{y}$ при убываніи x отъ $a - r$ до R все время возрастаетъ.

жидкости, коэффиціентъ абсолютнаго расширенія которой равенъ 0,0002, при 20°, если бы температура и высота столба воды остались прежними?

Назовемъ плотность жидкости при 4° при d, при 20°—черезъ d_1, высоту ея при 20°—черезъ h. Такъ какъ плотность воды при 4° равна 1 и такъ какъ высоты уравновѣшивающихся въ сообщающихся сосудахъ жидкостей обратно пропорціональны ихъ плотностямъ, то

$$\frac{d}{1}=\frac{1,55}{3,17} \qquad (1),$$

откуда

$$d=0,49.$$

Единица объема жидкости при повышеніи температуры ея съ 4° до 20° обращается въ

$$1+0,0002\,(20-4)=1,0032$$

той же единицы. Такъ какъ плотность измѣняется при постоянной массѣ обратно пропорціонально объему, то

$$\frac{d}{d_1}=\frac{1,0032}{1} \qquad (2).$$

Снова примѣняя законъ, что высоты жидкостей въ сообщающихся сосудахъ обратно пропорціональны плотностямъ, находимъ (см. (1), (2)):

$$\frac{h}{1,55}=\frac{1}{d_1}=\frac{d}{d_1}\cdot\frac{1}{d}=\frac{1,0032\,.\,3,17}{1,55},$$

откуда

$$h=1,0032\,.\,3,17=3,18.$$

М. Милашевичъ (Севастополь); *К. Красюкъ* (Черкасы).

№ 649 (3 сер.). *Показать, что при n цѣломъ число*

$$n^3(n^2-7)^2-36n$$

дѣлится на 5040.

Тожественныя преобразованія

$$n^3(n^2-7)^2-36n=n\,[n^2(n^2-7)^2-6^2]=$$

$$=n\,[n(n^2-7)+6]\,[n(n^2-7)-6]=n(n^3-7n+6)\,(n^3-7n-6)=$$

$$=n[n^3-n-6n+6]\,[n^3-n-6n-6]=$$

$$=n(n-1)\,(n^2+n-6)\,(n+1)\,(n^2-n-6)=$$

$$=n(n-1)\,(n+3)\,(n-2)\,(n+1)\,(n-3)\,(n+2)=$$

$$=(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$

позволяютъ заключить, что предложенное выраженіе есть произведеніе семи послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, а потому оно дѣлится безъ остатка на число

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7=5040.$$

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *Орловъ* (Москва).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 12-го мая 1901 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.